

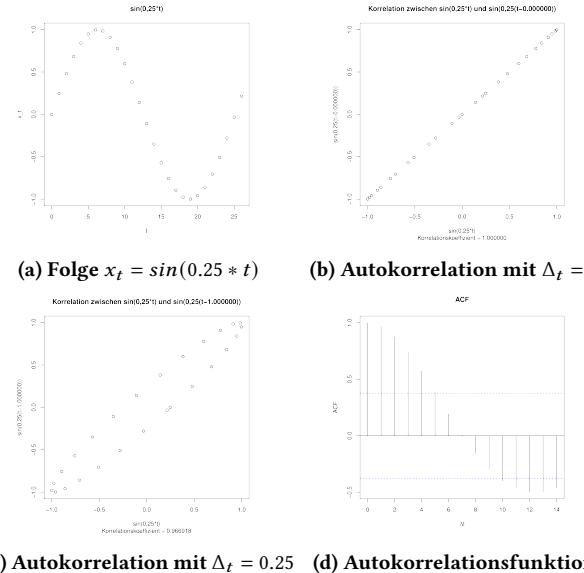
Zeitreihenanalyse mit SARIMA

M. Heckel, H. W. Mark

ZUSAMMENFASSUNG

Im Rahmen dieser Studienarbeit werden mehrere Zeitreihen analysiert, die die monatlich verkaufte Anzahl von Artikeln enthalten. Dabei wird der Verlauf der jeweiligen Zeitreihe vorhergesagt und anhand vorhandener Daten verglichen.

In dieser Arbeit werden SARIMA (saisonale auto regression integrated moving average) zur Vorhersage der Zeitreihen sowie MAPE (mean absolute percentage error) als Metrik verwendet.



1 EINFÜHRUNG

SARIMA bezeichnet ein statistisches Modell, welches zum Vorhersagen von Zeitreihen verwendet werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Zeitreihen von 50 Artikeln mittels SARIMA analysiert und vorhergesagt. Um die Vorhersagen anhand einer Metrik auswerten und vergleichen zu können, wird in dieser Arbeit an einem definierten Zeitpunkt t_f von der Analyse zur Vorhersage übergegangen. Befindet sich t_f nicht am Ende der Zeitreihe, stehen die tatsächlich erhobenen Daten zum Bestimmen der Metrik zur Verfügung.

Anhand der Metrik können die Parameter des SARIMA-Modells angepasst werden. Diese Arbeit untersucht, wie gut SARIMA zur Vorhersage von verschiedenen Zeitreihen geeignet ist und von welchen Eigenschaften der Zeitreihen die Qualität der Vorhersagen abhängt.

2 THEORETISCHE HINTERGRÜNDE

2.1 Autokorrelation

Autokorrelation bezeichnet die Beziehung einer Folge zu einer an der Abzisse verschobenen Kopie von sich selbst. Die Autokorrelationsfunktion $a(\Delta_t)$ gibt an, wie stark die Folge $x(t)$ mit der Folge $x(t + \Delta_t)$ korreliert.

Im Folgenden wird beispielhaft die Folge $x_t = \sin(0.25 * t); 0 \leq i \leq 26$ betrachtet (Fig. 1a). Die Autokorrelation mit $\Delta_t = 0$ ergibt per Definition eine Gerade und der Korrelationskoeffizient ist in diesem Fall 1 (Fig. 1b). Ist $\Delta_t = 0.25$, weichen die Punkte von einer Geraden ab (Fig. 1c). Bildet man den Zusammenhang zwischen $\Delta_t = 0$ und dem Korrelationskoeffizienten der Autokorrelation, wird dies als Autokorrelationsfunktion (Fig. 1d) bezeichnet.

(a) Folge $x_t = \sin(0.25 * t)$ (b) Autokorrelation mit $\Delta_t = 0$

(c) Autokorrelation mit $\Delta_t = 0.25$ (d) Autokorrelationsfunktion

Abbildung 1: Autokorrelation

2.2 Partielle Autokorrelation

Im Gegensatz zur Autokorrelation wird bei der partiellen Autokorrelation nicht der Zusammenhang zwischen einer Folge und einer verschobenen Kopie betrachtet, sondern es findet ein zusätzlicher Normalisierungsschritt statt. Dadurch wird die direkte Beziehung der Folge zu der verschobenen Version angegeben. Einflüsse durch andere Verschiebungen werden eliminiert.

2.3 Autoregression

Ein autoregressives Modell [4] der Ordnung p beschreibt den Wert y_t einer Zeitreihe als Summe einer Konstanten c , eines Rauschterms ϵ_t (weißes Rauschen, normalverteilt) und des gleitenden Mittelwerts über die gewichteten p vorherigen Werte der Zeitreihe: $y_t = c + \epsilon_t + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i}$

Ein $AR(p)$ Prozess verfügt über p Parameter, die die Gewichte der p vergangenen Werte der Zeitreihe angeben. Ein $AR(0)$ Prozess entspricht dem weißen Rauschen um den Wert c , da $y_t = c + \epsilon_t + \sum_{i=1}^0 a_i y_{t-i} = c + \epsilon_t$. Dabei ist ϵ_t bei einer Zeitreihe mit n Werten unkorreliert zu den vorherigen Werten $\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots, \epsilon_{t-n}$.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Parameter a_0, a_1, \dots, a_n auf Basis einer gegebenen Zeitreihe zu berechnen, z.B. die Methode der kleinsten Quadrate. In dieser Studienarbeit wird nicht weiter darauf eingegangen.

Bei einem $AR(p)$ Prozess weicht der Wert der partiellen Autokorrelationsfunktion für $\Delta_t > p$ nicht signifikant von 0 ab. Trifft diese Eigenschaft auf eine Zeitreihe zu, kann sie meist gut durch einen $AR(p)$ Prozess dargestellt werden.

2.4 Lag Operator

Der Lag Operator L gibt den Wert des vorherigen Elements einer Zeitreihe an. Sei $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, so ist $Ly_t = y_{t-1}$. Die Umkehroperation L^{-1} ist wie folgt definiert: $L^{-1}y_t = y_{t+1}$. Der Lag Operator kann beliebige ganzzahlige Exponenten annehmen, z.B. $L^2y_t = y_{t-2}$.

2.5 Differenz-Operator

Der Differenz-Operator Δ ist durch $\Delta = 1 - L$ definiert, d.h. $\Delta y_t = y_t - Ly_t = y_t - y_{t-1}$. Analog zum Lag-Operator kann auch der Differenz-Operator mit ganzen Zahlen potenziert werden.

2.6 Moving Average

Ein Moving Average Modell [4] der Ordnung q beschreibt analog zum autoregressiven Modell den Wert y_t einer Zeitreihe als Summe einer Konstanten c und eines Rauschterms ϵ_t (weißes Rauschen, normalverteilt). Im Gegensatz zum autoregressiven Modell wird allerdings nicht der gleitende Mittelwert über die gewichteten vorherigen Werte der Zeitreihe, sondern über die vorherigen Rauschterme ϵ_{t-i} verwendet: $y_t = c + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j}$. Ein $MA(q)$ Prozess verfügt über q Parameter, die die Gewichte der q vergangenen Rauschterme angeben. Im Gegensatz zu einem $AR(p)$ Prozess gehen die Rauschterme ϵ_{t-n} direkt und nicht indirekt über $y_{t-n} = c + \epsilon_{t-n} + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-n-i}$ in y_t ein. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass ein Peak im Rauschterm ϵ_t bei einem $MA(q)$ Prozess nur die q nächsten Ergebnisse beeinflusst. Bei einem $AR(p)$ Prozess besteht im Gegensatz dazu ein Einfluss auf alle zukünftigen Größen, da y_t von ϵ_t beeinflusst wird, und damit auch y_{t+1} über y_t , y_{t+2} über y_{t+1}, \dots, y_{t+n} über y_{t+n-1} .

Im Gegensatz zu einem $AR(p)$ Prozess ist das Berechnen der Parameter b_0, b_1, \dots, b_n aufwändiger, da die Rauschterme ϵ_i nicht aus der Zeitreihe ermittelt werden können.

Bei einem $MA(q)$ Prozess weicht der Wert der Autokorrelationsfunktion für $t_\Delta > q$ nicht signifikant von 0 ab. Trifft diese Eigenschaft auf eine Zeitreihe zu, kann sie meist gut durch einen $MA(q)$ Prozess dargestellt werden.

2.7 ARMA

Ein $ARMA(p, q)$ Prozess [3] besteht aus einem autoregressiven Prozess $AR(p)$ und einem Moving Average Prozess $MA(q)$. Der Prozess ist wie folgt definiert: $y_t = c + \epsilon_t + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j}$. Es gibt die Sonderfälle $ARMA(p, 0) = AR(p)$ und $ARMA(0, q) = MA(q)$.

$ARMA(p, q)$ Modelle können nur gute Vorhersagen für stationäre Zeitreihen treffen. Dabei handelt es sich um Zeitreihen, die um einen Wert schwanken, also keinen Trend aufweisen.

2.8 ARIMA

Wird ein ARMA Modell nicht auf y_t , sondern auf $\Delta^d y_t$ angewendet, handelt es sich um ein integriertes ARMA-Modell [8], [5], welches als $ARIMA(p, d, q)$ bezeichnet wird. Dieses Modell wird als „integriert“ bezeichnet, da die vorhergesagten Werte der Zeitreihe durch d -faches Integrieren der durch das ARMA-Modell auf der um d differenzierten Zeitreihe vorhergesagten Werte berechnet werden.

Durch einfaches Differenzieren verliert eine Zeitreihe einen linearen Trend, durch zweifaches Differenzieren einen quadratischen Trend, durch dreifaches Differenzieren einen kubischen Trend, etc. Es ist also möglich, Trends durch ggf. mehrfaches Differenzieren aus einer Zeitreihe zu entfernen.

Auf diese Zeitreihe ohne Trends wird anschließend das $ARMA(p, q)$ Modell angewendet, um die Zeitreihe zu analysieren und Vorhersagen zu treffen.

Um aus diesen Vorhersagen auf die Werte der ursprünglichen Zeitreihe schließen zu können, werden die durch das $ARMA(p, q)$ Modell berechneten Werte abschließend d mal integriert.

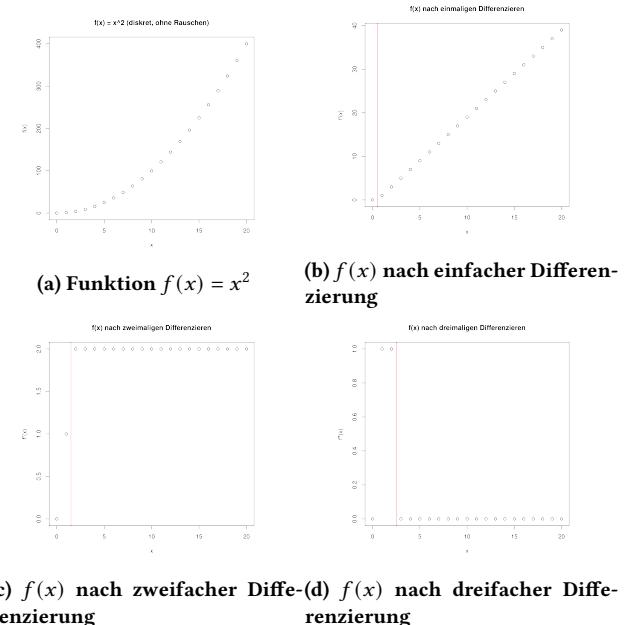


Abbildung 2: Diskretes Differenzieren

Beim Berechnen der Differenzen ist darauf zu achten, dass die Differenzenbildung für den ersten Wert der Zeitreihe nicht möglich ist, weshalb dieser in der späteren Analyse nicht berücksichtigt wird. Dies gilt für jede Differenzierung, d.h. nach einfacher Differenzierung darf der erste Wert nicht beachtet werden, nach zweifacher Differenzierung die ersten beiden Werte, etc.

Diese Werte enthalten die zur späteren Integrierung benötigte Information der Verschiebung an der Ordinate.

2.9 SARIMA

ARIMA kann zur Vorhersage von Zeitreihen, die über einen Trend verfügen, verwendet werden. Allerdings ist es nicht für Zeitreihen mit saisonalen Komponenten geeignet. Dieses Problem wird durch das $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_m$ Modell [6] gelöst. Dabei wird ein weiteres saisonales ARIMA-Modell der Ordnungen P, D, Q für die Periodenlänge m hinzugefügt. Im Rahmen dieser Arbeit ist $m = 12$.

2.10 MAPE

MAPE (mean absolute percentage error) ist eine Metrik für die Qualität einer statistischen Vorhersage. Dabei wird bei einer Zeitreihe

für jeden vorhergesagten Datenpunkt die absolute prozentuale Abweichung der Vorhersage zum tatsächlich gemessenen/beobachteten Wert ermittelt. Aus diesen prozentualen Abweichungen wird anschließend das arithmetische Mittel berechnet.

$M = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n \left(\left| \frac{y_t - f_t}{y_t} \right| \right)$, wobei y_t der tatsächlich gemessene bzw. beobachtete Wert zum Zeitpunkt t und f_t der zum Zeitpunkt t vorhergesagte Wert ist.

3 AUSWERTUNG

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Zeitreihen stellen den zeitlichen Verlauf der Verkaufszahlen von Artikeln dar. Alle Zeitreihen bestehen aus 49 Datenpunkten, die jeweils die Verkaufszahlen eines Monats darstellen. Die Zeitreihen beginnen im Januar 2016 und enden im Januar 2020.

Alle Zeitreihen wurden so aufgeteilt, dass die letzten 12 Werte durch das SARIMA-Modell vorhergesagt werden, d.h. die Zeitreihe wurde im Januar 2019 abgeschnitten und das Modell mit diesem Teil der Zeitreihe berechnet. Anschließend wurde das Modell für die Vorhersage der Werte ab Februar 2019 verwendet. Diese Vorhersage wurde dann mittels MAPE mit den vorhandenen Daten in diesem Zeitraum verglichen.

Mit ARIMA bestand das Problem, dass die Vorhersagen nach wenigen Monaten nahezu konstant wurden. Durch die Verwendung von SARIMA wurde dieses Problem behoben. Die Ordnungen p, d, q des SARIMA-Modells wurden mittels PACF [1], KPSS [7] und ACF [2] bestimmt. Da bei einigen Zeitreihen durch zu häufiges Differenzieren die Vorhersagen massiv von den erhobenen Daten abwichen, wurde die Anzahl der Differenzierungen auf maximal 3 begrenzt. Für p und q wurden alle Kombinationen aus den jeweils bestimmten Werten ± 1 verwendet, wobei Null die Untergrenze war. Für die Ordnungen P, D, Q wurden alle Kombinationen aus $0 \leq P \leq 4$, $0 \leq D \leq 3$ und $0 \leq Q \leq 4$ verwendet. Daraufhin wurden die MAPE-Werte der Vorhersagen berechnet. Die Vorhersage einer Zeitreihe mit dem besten MAPE-Wert wurde als Diagramm geplottet. Diese Diagramme sowie die Tabellen der verschiedenen Kombinationen von p, d, q, P, D, Q und dem zugehörigen MAPE-Wert befinden sich im Anhang. Da das SARIMA-Modell über keine semantischen Informationen zu den Daten verfügt, waren die Werte der Vorhersagen nicht ganzzahlig. In den Tabellen im Anhang wurden die Werte der Vorhersagen auf ganze Zahlen gerundet.

Für die Auswertung werden nur die jeweils besten Kombinationen aus P, D, Q für jede Zeitreihe berücksichtigt.

4 ERGEBNISSE

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse anhand einiger ausgewählter Zeitreihen vorgestellt. Es wird darauf eingegangen, aus welchen Gründen die Vorhersagen zu den tatsächlich erhobenen Daten passen oder nicht passen. Die Anzahl verkaufter Artikel wurde jeweils am Ersten des Monats erhoben und gibt sehr wahrscheinlich die Artikelverkäufe im vergangenen Monat an. In den folgenden Abschnitten wird immer auf den Monat, in dem die Daten erhoben wurden eingegangen, d.h. ein „Peak im Februar“ bedeutet, dass im Januar mehr Artikel verkauft wurden, was sich in der am ersten Februar erfassten Anzahl widerspiegelt.

In den Diagrammen wird folgende Farbgebung verwendet:

Blau	Gegebene Zeitreihe für Fit der Parameter
Orange	Trend der gegebenen Zeitreihe
Rot	Saisonalität der gegebenen Zeitreihe
Blau	Vorhergesagte Zeitreihe
Rot	Gegebene Zeitreihe im Vorhersagezeitraum
Grau	Eintrittswahrscheinlichkeit 80%
Grau	Eintrittswahrscheinlichkeit 95%

Abbildung 3: Legende

4.1 Zeitreihe Grup1-23

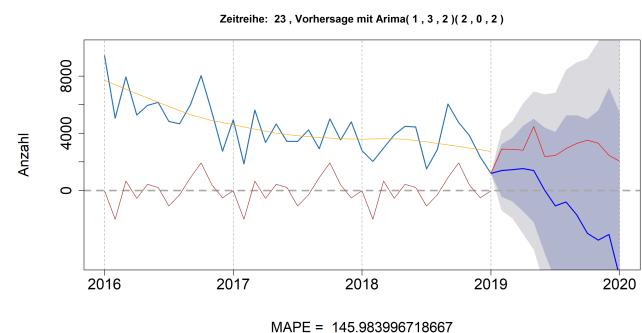


Abbildung 4: Zeitreihe Group1-23

Diese Zeitreihe verfügt über einen deutlich erkennbaren Abwärts-trend im ersten Jahr, der im zweiten Jahr abflacht und sich im dritten Jahr wieder verstärkt. Im ersten und im dritten Jahr gibt es im Herbst einen verhältnismäßig großen Peak, der im zweiten Jahr weniger stark ausgeprägt ist. Außerdem gibt es am Anfang der ersten drei Jahre einen deutlichen Einbruch der Verkaufszahlen. Im vierten Jahr gibt es im Frühling einen Peak, der in dieser Form in den vorherigen Jahren nicht aufgetreten ist.

Die Vorhersage mit Hilfe des SARIMA-Modells zeigt, dass das Modell den insgesamt fallenden Trend der Zeitreihe in deutlich stärkerer Ausprägung vorhergesagt hat. Da das SARIMA-Modell keine semantischen Informationen verarbeiten kann, werden die vorhergesagten Verkaufszahlen des Artikels im Juni 2019 negativ, was bei verkauften Artikeln nicht möglich ist.

Insgesamt weicht die Vorhersage sehr stark von den tatsächlich gemessenen Daten ab. In der Realität setzt die Zeitreihe den leicht fallenden Trend aus dem Jahr 2018 fort. Das Modell hat einen sehr stark fallenden Trend vorhergesagt, der in dieser Ausprägung in der Zeitreihe nicht vorkam. Möglicherweise liegt die Ursache dafür darin, dass das Modell mit $p = 1$ und $q = 2$ gefittet wurde, weil dadurch neben der saisonalen Komponente jeweils die letzten beiden Werte direkt in die Vorhersage eingehen. Da es ab September 2018 einen Abfall von einem Peak über 4 Monate gab, hat das Modell diese Werte übernommen auf Basis davon den weiteren Verlauf vorhergesagt.

Diese Zeitreihe zeigt sehr deutlich, dass das SARIMA-Modell anfällig gegen Zeitreihen ist, die sich in dem Zeitraum direkt vor der

Vorhersage anders als im bisherigen Verlauf verhalten, da dadurch die nicht-saisonale Komponente des Modells auf Basis dieser Werte vorhersagen trifft. Bei Zeitreihen mit sehr ausgeprägter Saisonalität kann dieser Effekt unter Umständen durch eine überwiegende saisonale Komponente abgefangen werden, allerdings war dies bei dieser Zeitreihe nicht der Fall und die Vorhersage wurde durch den starken Abfall der Werte über die letzten 4 Monate des Fit Zeitraums sehr stark beeinflusst.

4.2 Zeitreihe Alle-3

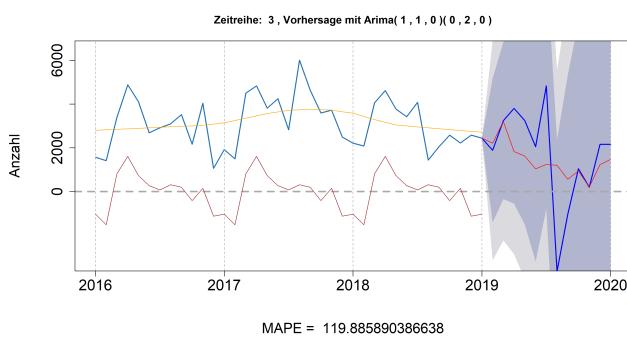


Abbildung 5: Zeitreihe Alle-3

Bei dieser Zeitreihe ist bis Mitte 2017 ein leichter Aufwärtstrend und ab Mitte 2017 ein leichter Abwärtstrend erkennbar. In den ersten drei Jahren steigt die Verkaufszahl der Artikel im Frühling deutlich an. Im zweiten Jahr gibt es zusätzlich einen starken Peak im August.

Im vierten Jahr gibt es, wie in den Jahren zuvor, einen Peak im Frühling, der aber weniger stark ausfällt. Anschließend fällt die Zeitreihe bis auf ein Minimum von knapp 200 verkauften Artikeln im November 2019 und steigt danach wieder an.

Wie auch die im vorherigen Abschnitt 4.1 beschriebene Zeitreihe zeigt dieses Beispiel deutlich, dass SARIMA nicht über eine Semantik der Daten verfügt. Bei dieser Zeitreihe wurde Mitte 2019 ein negativer Wert vorausgesagt, der bei der gemessenen Größe nicht erreicht werden kann.

Bei der Vorhersage ist eine starke Ähnlichkeit zum Jahr 2018 erkennbar. Zuerst fällt die Zeitreihe etwas ab, steigt dann über zwei Monate mit abnehmenden Anstieg an und fällt daraufhin über zwei Monate ab, woraufhin ein Peak folgt. Dieser Peak fällt in der Vorhersage stärker als im vorherigen Jahr aus. Es folgt ein massiver Einbruch, der im September 2019 wieder relativ nah an den tatsächlich gemessenen Daten liegt. Auch der verbleibende Teil der Vorhersage stimmt gut mit den ermittelten Daten überein.

Da die Abweichung bei den negativen Peak in der Vorhersage sehr groß ist und der Wert der real gemessenen Daten relativ klein, ergibt dies einen sehr hohen MAPE-Wert, der sich auch im Durchschnitt auswirkt. Darum hat diese Vorhersage eine mittlere prozentuale Abweichung von 119%.

4.3 Zeitreihe Alle-16

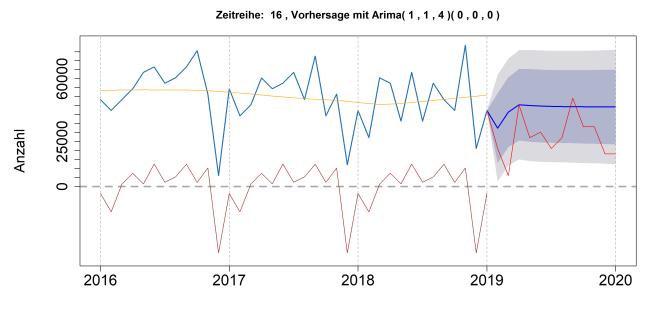


Abbildung 6: Zeitreihe Alle-16

Diese Zeitreihe verfügt über einen sehr schwachen Trend. Im ersten Jahr steigt der Trend zuerst leicht und fällt daraufhin wieder, im zweiten Jahr fällt der Trend über das gesamte Jahr leicht. 2018 steigt der Trend wieder leicht an. In den ersten drei Jahren gibt es jeweils im Dezember einen starken Einbruch der Verkaufszahlen. Außerdem gibt es im Februar jeweils einen kleinen Einbruch der Zahlen.

Im vierten Jahr gibt es im Februar und März einen Einbruch, der deutlich stärker als in den vergangenen Jahren ist. Es folgen ein Peak, ein Einbruch, und ein weiterer Peak. Ende 2019 fallen die Verkaufszahlen wieder relativ stark ab.

Im Fall dieser Zeitreihe ist erkennbar, dass die Verkaufszahlen im vierten Jahr deutlich geringer ausgewiesen sind als die Verkaufszahlen der ersten drei Jahre vermuten ließen. Möglicherweise liegt dies an einem Ereignis, das Anfang 2019 stattfand. Auf Basis der gegebenen Zahlen der ersten drei Jahre war es nicht möglich, diese deutlich geringeren Verkaufszahlen vorherzusagen. Bei dem Ereignis könnte es sich möglicherweise um so etwas wie den Ausbruch von Corona Anfang 2020 handeln, allerdings ist dies eher unwahrscheinlich, da die Verkaufszahlen der anderen Artikel nicht betroffen sind. Wahrscheinlich handelt es sich um ein Ereignis, welches nur einen Artikel bzw. ein Unternehmen oder eine Branche traf. Da nicht bekannt ist um welchen Artikel es sich handelt, ist an dieser Stelle keine konkrete Vermutung über das Ereignis möglich.

Bei dem verwendeten SARIMA-Modell sind die Parameter P, D, Q jeweils 0, was bedeutet, dass das Modell über keine saisonale Komponente verfügt. Im Ergebnis ist deutlich sichtbar, dass die vorhergesagte Zeitreihe nach einigen kleinen Schwankungen Anfang 2019 relativ linear ist.

Für diese Zeitreihe war die Vorhersage ohne saisonalen Anteil vermutlich am besten, da es im vorhergesagten Zeitraum einen deutlichen Abfall der Verkaufszahlen gab.

An diesem Beispiel zeigt sich deutlich, dass das Modell Ereignisse, die in der Zukunft liegen, nicht berücksichtigen kann. Gibt es also Ereignisse, die sich auf die Zeitreihe auswirken und die im zum Fitten der Parameter verwendeten Zeitraum nicht aufgetreten sind, ist es für das Modell nicht möglich, diese Ereignisse zu berücksichtigen. Entsprechend weichen die Vorhersagen stärker von den tatsächlich gemessenen Daten ab.

4.4 Zeitreihe Alle-15

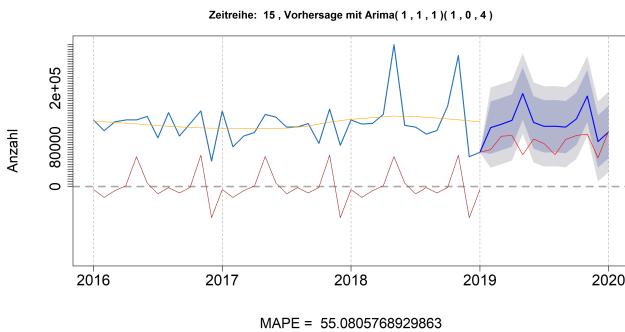


Abbildung 7: Zeitreihe Alle-15

Analog zu der in Abschnitt 4.3 vorgestellten Zeitreihe verfügt auch diese Zeitreihe in den ersten drei Jahren über einen geringen, leicht schwankenden Trend. Im Jahr 2018 gibt es zwei sehr starke Peaks im Mai und im November.

Wie bereits beim vorherigen Beispiel in Abschnitt 4.3 sind die Verkaufszahlen von Artikeln im Jahr 2019 auch bei dieser Zeitreihe deutlich geringer. Möglicherweise handelt es sich um Artikel des gleichen Unternehmens oder Artikel aus der gleichen Branche.

In der Vorhersage des SARIMA-Modells ist deutlich zu sehen, dass die Peaks des Jahres 2018 im Mai und im November in abgeschwächter Form in die Vorhersage übernommen wurden. Die tatsächlich erhobene Zeitreihe verhält sich bei dem ersten Peak umgekehrt, d.h. es gibt einen Einbruch anstelle des Peaks. An dieser Stelle befinden sich die gemessenen Daten außerhalb des grauen Bereichs, der angibt, dass der tatsächlich eintretende Wert zu 95% innerhalb dieses Bereichs liegt.

4.5 Zeitreihe Alle-1

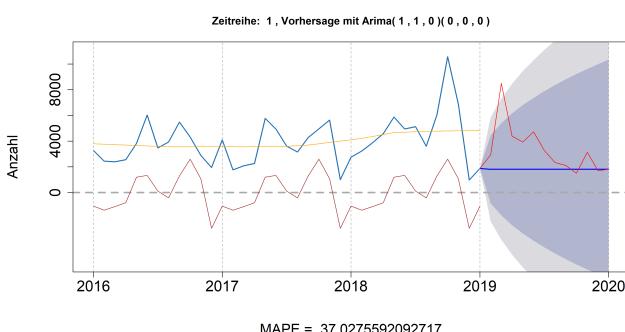


Abbildung 8: Zeitreihe Alle-1

Analog zu den in den letzten beiden Abschnitten 4.3 und 4.4 verfügt auch diese Zeitreihe über einen sehr geringen Trend. Insgesamt steigt der Trend von Mitte 2017 bis Mitte 2018 leicht an. Im Oktober 2018 ist ein starker Peak erkennbar. Meistens werden im Frühling und im Herbst mehr Artikel verkauft als im Sommer und Winter.

Im März 2019 zeigt die Zeitreihe einen deutlichen Peak und fällt im folgenden Verlauf des Jahres. Es gibt noch einen kleinen Peak im Sommer und einen kleinen Peak im Herbst. Die Verkaufszahl der Artikel im März 2019 ist deutlich höher als im März der vergangenen Jahre. Insgesamt zeigt sich in 2019 im Gegensatz zu den vergangenen Jahren ein sehr starker Abwärtstrend.

Auch für diese Zeitreihe hat das SARIMA-Modell ohne saisonale Komponente die beste Vorhersage geliefert. Ab März 2019 ist die Vorhersage konstant. Der Peak der gemessenen Daten im März verlässt den grauen Bereich, der angibt, dass der tatsächliche eintretende Wert zu 95% innerhalb dieses Bereichs liegt.

Die durchschnittliche prozentuale Abweichung dieser Vorhersage beträgt 37%.

4.6 Zeitreihe Alle-4

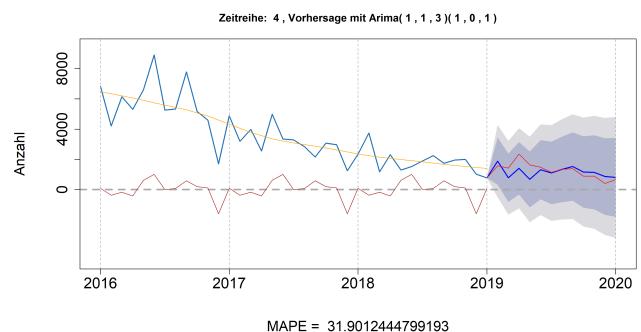


Abbildung 9: Zeitreihe Alle-4

Diese Zeitreihe verfügt über einen starken Abwärtstrend, der am Ende des Fit Zeitraums etwas abflacht. Anhand der ersten drei Jahre ist erkennbar, dass die Zeitreihe über eine geringe Saisonalität verfügt. Im Sommer gibt es einen kleinen Peak und im Dezember gibt es einen kleinen Einbruch.

Im vierten Jahr gibt es einen kleinen Peak im April, danach fallen die Verkaufszahlen weiter.

Abgesehen von dem Peak im April 2019 wurde die Zeitreihe durch das gewählte SARIMA-Modell gut vorhergesagt. Dennoch ist eine durchschnittliche prozentuale Abweichung von knapp 32% angegeben. Dies liegt daran, dass die tatsächlich gemessenen Verkaufszahlen im Dezember 2019 mit 402 deutlich geringer als die Vorhersage mit 858 sind. Die absolute Prozentuale Abweichung beträgt $|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}| = |\frac{402 - 858}{402}| = 1,13 = 113\%$. Um diesen Wert auf den durchschnittlichen MAPE zu korrigieren, würden etwas mehr als 3 korrekte Vorhersagen benötigt werden.

Dieses Beispiel zeigt eine negative Eigenschaft des MAPE-Werts als Metrik für die Qualität der Vorhersage: Ist der tatsächliche Wert der Zeitreihe geringer als die Vorhersage, führt dies zu sehr hohen absoluten prozentualen Abweichungen, was sich sehr stark in der durchschnittlichen absoluten prozentualen Abweichung widerspiegelt. Würde ein Artikel in einem Monat überhaupt nicht verkauft werden, wäre die absolute prozentuale Abweichung zu einem Wert ungleich 0 in der Vorhersage unendlich groß, was einen unendlich hohen MAPE-Wert der Vorhersage zur Folge hätte. Insgesamt ist

der MAPE-Wert bei Verkaufszahlen nahe Null selbst bei geringen Abweichungen der Vorhersage sehr hoch.

Abhängig vom Anwendungsfall ist der MAPE-Wert trotz oder gerade aufgrund dieser Eigenschaft eine sehr gute Metrik. Angenommen, die Vorhersage wird als Grundlage zur Investition in Aktien verwendet. In diesem Fall wäre eine Vorhersage, die dem doppelten des tatsächlich eingetretenen Kurses entspricht, eine Abweichung von 100%, d.h. man hätte mit dem doppelten Wert der Aktie gerechnet. Würde eine Aktie im Extremfall auf 0 fallen, wären jegliche Investitionen in diese Aktie verloren.

Tendenziell neigen geringe Werte der tatsächlichen Zeitreihe also dazu, sehr hohe MAPE-Werte zur Folge zu haben. Dennoch bedeutet ein hoher MAPE-Wert nicht unbedingt, dass die gemessenen Größen nahe an 0 liegen. Es könnte auch bedeuten, dass die Vorhersage deutlich geringer als die tatsächlich erhobenen Zahlen war. In diesem Fall ist der Effekt bei gleicher Abweichung allerdings deutlich weniger ausgeprägt.

4.7 Zeitreihe Alle-2

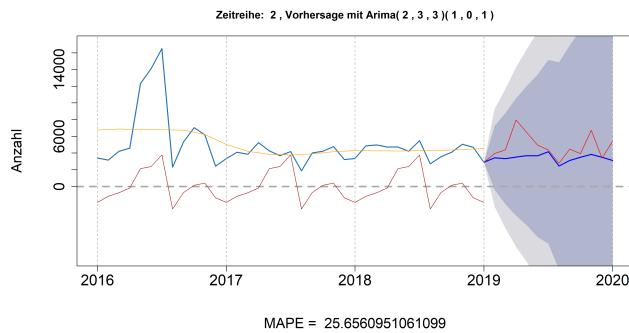


Abbildung 10: Zeitreihe Alle-2

Bei dieser Zeitreihe ist in den drei Jahren von 2016 bis 2019, bis auf den kurzen Abwärtstrend vom Herbst 2016 bis Frühling 2017, nur ein sehr schwacher Trend erkennbar. Im ersten Jahr gibt es einen starken Peak über die Monate Juni und Juli, woraufhin die Verkaufszahlen stark abfallen. Im Oktober ist ein zweiter, aber schwächerer Peak vorhanden. In den beiden Jahren darauf schwanken die Verkaufszahlen nur noch leicht mit jeweils einem kleinen Einbruch im August.

Im vierten Jahr setzt sich der Trend aus den beiden Vorjahren fort. Außerdem gibt es einen größeren Peak im April und einen weiteren im November. Auch hier ist wieder ein Einbruch im August zu erkennen. Am Jahresende steigen die Verkaufszahlen außerdem im Vergleich zu den Vorjahren wieder an.

Für 2019 wurden nur sehr gering schwankende Verkaufszahlen vorhergesagt. Ein Grund dafür könnte sein, dass die Verkaufszahlen über die drei Vorjahre hinweg immer stabiler wurden. Allerdings gab es in 2019 tatsächlich wieder zwei größere Peaks. Den Einbruch im August hat das gewählte SARIMA-Modell aufgrund der Vorjahre richtig vorhergesagt.

Schlussendlich gibt es aufgrund der größeren Schwankungen in 2019 gewisse Abweichungen zu den realen Werten.

4.8 Zeitreihe Group1-24

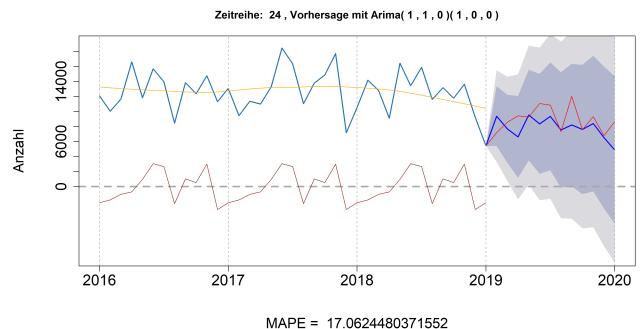


Abbildung 11: Zeitreihe Group1-24

In dieser Zeitreihe ist in den ersten beiden Jahren ein leicht schwankender Trend zu erkennen. Im dritten Jahr ist ein Abwärtstrend vorhanden. Die Verkaufszahlen im Jahr 2016 schwanken sehr stark. 2017 gibt es zwei stark ausgeprägte Peaks in den Monaten Juni und November. Von November auf Dezember fallen die Verkaufszahlen sehr stark ab. Im dritten Jahr gibt es wieder Schwankungen wie im ersten Jahr, wobei gegen Ende des Jahres die Verkaufszahlen wieder stark abfallen, wie bereits 2017.

In der ersten Hälfte von 2019 steigen die Verkaufszahlen an und schwanken dann das restliche Jahr mit einem Abwärtstrend.

Das gewählte SARIMA-Modell hat weniger schwankende Werte mit einem leichten Abwärtstrend vorhergesagt. Dabei wurde einfach der Trend aus dem Vorjahr weitergeführt. Dieser Trend ist auch bei den realen Daten vorhanden, wobei diese im Vergleich zu den vorhergesagten Werten etwas stärker schwanken, vor allem über die Monate Juli bis Oktober.

Obwohl die Verkaufszahlen in den ersten drei Jahren teils starke Schwankungen hatten, konnte die Vorhersage gute Ergebnisse erzielen.

4.9 Zeitreihe Group1-11

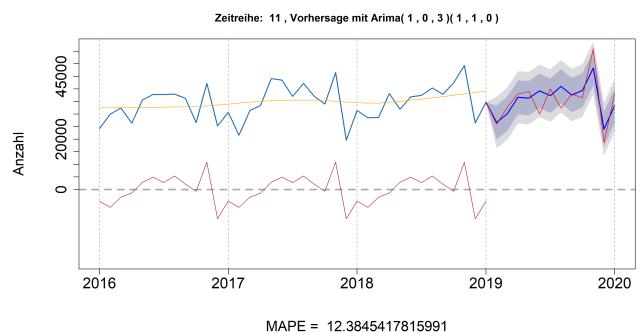


Abbildung 12: Zeitreihe Group1-11

Bei dieser Zeitreihe ist ein sehr schwacher Aufwärtstrend zu beobachten. Des weiteren beginnt jedes Jahr mit steigenden Verkaufszahlen, die danach etwas schwanken, gegen Ende des Jahres ihren Höhepunkt erreichen und schließlich stark abfallen.

Im vierten Jahr setzt sich der bisherige Trend fort. Auch der Verlauf über das gesamte Jahr hinweg ist wie in den Vorjahren, allerdings gibt es im November einen sehr stark ausgeprägten Peak. Danach fallen die Verkaufszahlen aber noch stärker als in den Jahren davor wieder ab.

Für 2019 hat das gewählte SARIMA-Modell auf Basis des jährlichen Musters eine Vorhersage getroffen. Im Vergleich zu den Zeitreihen davor, ist der Bereich, der eine Eintrittswahrscheinlichkeit von 80% bzw. 95% angibt, eher klein. Trotzdem sind die realen Daten noch in diesem Bereich. Die Vorhersage deckt sich sogar an einigen Stellen mit den realen Werten.

Resultierend daraus kann man ableiten, dass sich das SARIMA-Modell sehr gut zur Vorhersage von Zeitreihen eignet, die einem gleichbleibenden Muster folgen. Der MAPE-Wert ist deshalb auch sehr gering.

4.10 Zeitreihe Group1-10

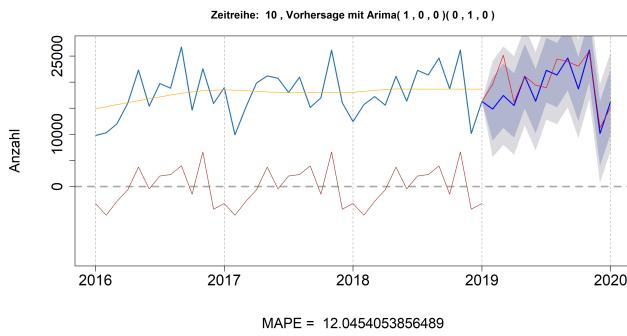


Abbildung 13: Zeitreihe Group1-10

Diese Zeitreihe hat im ersten Jahr einen leichten Aufwärtstrend. In den beiden Jahren danach ist ein kaum schwankender Trend vorhanden. Analog zu der in Abschnitt 4.9 vorgestellten Zeitreihe steigen auch hier zu jedem Jahresbeginn die Verkaufszahlen an und fallen gegen Ende des Jahres wieder ab.

In 2019 bleibt der wesentliche Verlauf gleich, bis auf einen starken Peak im März. In den ersten vier Monaten wurden somit weit mehr Artikel verkauft, als im gleichen Zeitraum in den Jahren davor.

Auch hier wird die Vorhersage auf Basis des jährlichen Musters getroffen und behält den Trend der beiden Vorjahre bei. Vergleicht man die ersten drei Jahre und die Vorhersage mit der Saisonalität der Zeitreihe, fällt auf, dass diese zu großen Teilen sehr ähnlich sind.

Da das gewählte SARIMA-Modell die realen Daten, bis auf den Peak im März, sehr gut vorhersagen konnte, ist auch die durchschnittliche prozentuale Abweichung mit rund 12% sehr gering. Bei dem Peak im Frühjahr handelt es sich um ein einmaliges Ereignis, weshalb das Modell dieses nicht vorhersagen konnte.

4.11 Zeitreihe Group1-14

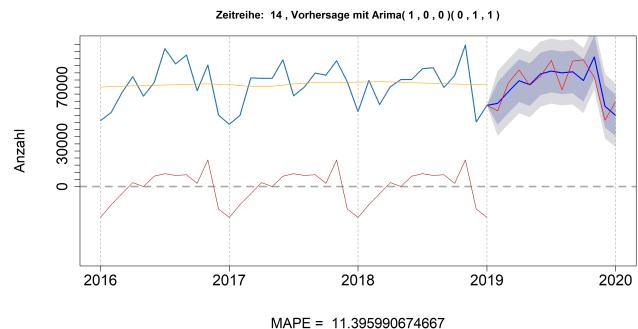


Abbildung 14: Zeitreihe Group1-14

Bei dieser Zeitreihe ist wieder ein sehr schwacher Trend erkennbar. Wie bereits in den letzten beiden Abschnitten 4.9, 4.10 steigen auch hier zu Beginn jeden Jahres die Verkaufszahlen, schwanken etwas und fallen dann gegen Ende des Jahres wieder stark ab. Dieser Verlauf spiegelt sich ebenso in der Saisonalität wieder. Hier gibt es aber noch einen Peak im November, kurz bevor die Anzahl verkaufter Artikel stark zurückgeht. Ein derartig ausgeprägter Peak ist nur in 2018 vorhanden, nicht aber in den beiden Jahren zuvor. Auch im vierten Jahr steigen ab Februar die Verkaufszahlen stark an und haben dann starke Schwankungen bis Oktober, bevor diese wieder stark abfallen. Einen etwas stärker ausgeprägten positiven Peak gegen Ende des Jahres gibt es auch hier nicht.

Das gewählte SARIMA-Modell hat damit wieder eine ziemlich gute Vorhersage treffen können. Die realen Werte schwanken zwar etwas mehr als die Vorhergesagten, allerdings sind diese Abweichungen nicht groß genug, um den MAPE-Wert ausschlaggebend zu verschlechtern.

Deshalb beträgt die durchschnittliche prozentuale Abweichung nur rund 11%.

4.12 Zeitreihe Alle-9

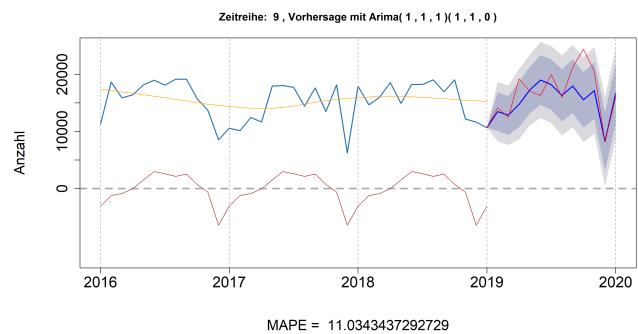


Abbildung 15: Zeitreihe Alle-9

Im ersten Jahr dieser Zeitreihe ist ein Abwärtstrend erkennbar. Dieser steigt gegen Ende des zweiten Jahres etwas an, flacht daraufhin

ab und sinkt gegen Ende des dritten Jahres wieder leicht. Die Verkaufszahlen in den drei Jahren unterscheiden sich vor allem in den ersten und letzten Monaten eines Jahres. Zu Beginn von 2016 steigt die Zeitreihe stark an, hält sich bis September oben und fällt ab dann stark ab. Im nächsten Jahr werden solch hohe Verkaufszahlen erst im Mai erreicht. Bis auf einen kleinen Einbruch im August und einen weiteren im Oktober bleiben die Verkaufszahlen bis November hoch und fallen erst dann stark ab. 2018 beginnt allerdings bereits mit einer hohen Anzahl an verkauften Artikeln. Im weiteren Verlauf schwankt die Zeitreihe und fällt ab Oktober.

In 2019 steigt die Zeitreihe bis April wieder stark an und erreicht von September bis November sogar Rekordwerte. Danach fällt die Zeitreihe wieder extrem stark ab, aber erholt sich gleich wieder.

Das gewählte SARIMA-Modell hat sich bei der Vorhersage stark an der Saisonalität der Vorjahre orientiert. Nur im November gibt es eine größere Abweichung.

Obwohl das Jahr 2019 ein Rekordhoch hatte, das sich über drei Monate aufspannte, konnte eine durchschnittliche prozentuale Abweichung von nur 11% erreicht werden. Der Grund dafür ist, dass die Vorhersage in der ersten Hälfte des Jahres und in den letzten Monaten sehr gut gepasst hat. Damit konnten die großen Abweichungen in den Monaten September bis November ausgeglichen werden. Folglich kann auch für ein Jahr mit einem einmaligen Ereignis ein guter MAPE-Wert erzielt werden, solange dieses Ereignis keine signifikanten Auswirkungen hat.

6 LITERATURVERZEICHNIS

- [1] *ACF and PACF plots*. <https://otexts.com/fpp2/non-seasonal-arima.html>. Zugriff: 04.08.2020.
- [2] *Autocorrelation*. <https://otexts.com/fpp2/autocorrelation.html>. Zugriff: 04.08.2020.
- [3] *Autoregressive moving-average (ARMA) models*. <https://nwsc-timeseries.github.io/atsa-labs/sec-tslab-autoregressive-moving-average-arma-models.html>. Zugriff: 04.08.2020.
- [4] *Common Approaches to Univariate Time Series*. <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section4/pmc444.htm>. Zugriff: 04.08.2020.
- [5] *Introduction to Forecasting with ARIMA in R*. <https://blogs.oracle.com/datascience/introduction-to-forecasting-with-arima-in-r>. Zugriff: 04.08.2020.
- [6] *Seasonal ARIMA models*. <https://otexts.com/fpp2/seasonal-arima.html>. Zugriff: 04.08.2020.
- [7] *Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root*. <http://debis.deu.edu.tr/userweb//onder.hanedar/dosyalar/kpss.pdf>. Zugriff: 04.08.2020.
- [8] *Time series features in Mathematica*. <https://web.archive.org/web/2011125115736/http://media.wolfram.com/documents/TimeSeriesDocumentation.pdf>. Zugriff: 04.08.2020.

5 DISKUSSION

Alle Vorhersagen haben einen MAPE-Wert zwischen 146 und 11. Insgesamt haben 90% davon einen MAPE-Wert kleiner als 44 und 40% sogar kleiner als 23. Insgesamt waren die Vorhersagen des SARIMA-Modells somit in einem guten Rahmen.

Besonders gut kann das SARIMA-Modell Zeitreihen vorhersagen, die ein jährlich gleichbleibendes Muster aufweisen. Ein Nachteil besteht darin, dass das Modell keine semantischen Informationen verarbeiten kann und somit negative sowie nicht ganzzahlige Verkaufszahlen vorhergesagt werden können. Außerdem können keine Ereignisse vorhergesagt werden, die in der zum Fitten der Parameter gegebenen Zeitreihe nicht schon einmal aufgetreten sind. Ein Beispiel für ein solches Ereignis wäre der Absturz des Aktienmarktes zu Beginn der Coronakrise.

Trotz der Kritikpunkte eignet sich das SARIMA-Modell in den meisten Fällen zur Vorhersage einer Zeitreihe und erreicht akzeptable Ergebnisse.